Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas.
MA1111. Segundo Parcial. Sept-Dic 2009 (30 pts).

Nombre:__________________________Carnét:__________________________

1. Responda con verdadero o falso, cada una de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta. Esto significa, que debe proporcionar una demostración si responde verdadero o un contraejemplo si responde falso. (4 pts, 2 pts cada item)

   a) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $f(a) = L$.

   b) Si $0 \leq f(x) \leq 3x^8 + 2x^6\ \forall x \in (-1, 1)$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. Encuentre los límites indicados o establezca que no existen.

$$a) \lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}, \text{(3 pts)} \quad b) \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}, \text{(4 pts)}$$

$$c) \lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \text{(2 pts)} \quad d) \lim_{x\to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} \text{(2 pts)}$$

3. Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < -1 \\ ax+b, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen}^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Hallar los valores de a y b, tales que, la función f sea continua en $x = 0$ y $x = -1$. (4 pts)

4. a) Enuncie el teorema del valor intermedio. (2 pts)

   b) Demuestre que la ecuación $t^3\cos(t) + 6\operatorname{sen}^5(t) - 3 = 0$, tiene una solución real entre 0 y 2π (3 pts)

5. Realizar la gráfica de una función f que cumpla todas y cada una de las siguientes condiciones: (6 pts, 1 pt cada item)

   a) f es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

b) En $x = 0$ f presenta una discontinuidad esencial.

c) f es continua por la derecha en $x = 1$ y discontinua por la izquierda en $x = 1$.

d) El rango de f es $\mathbb{R}$.

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

f) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Observación: Se evaluarán la redacción, el procedimento y los resultados. ¡Suerte!

Respuestas:

Respuesta 1:

a) Falso. Si consideramos $a = 0$, $L = 1$ y la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, pero $f(0) = 0$, por lo tanto, $L \neq f(0)$.

b) Verdadero, gracias al empleo del teorema del Sandwich. En efecto, la hipótesis de la proposición implica que

$$0 \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} 3x^8 + 2x^6 = 0$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Respuesta 2:

a) Aplicando evaluación ingenua al límite obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$. Para evadirla, multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador, lo que nos permite expresar;

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} &= \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(2+\sqrt{x-3})(x-7)(x+7)} \\ &= \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(2+\sqrt{x-3})(x-7)(x+7)} \\ &= -\lim_{x\to 7} \frac{1}{(2+\sqrt{x-3})(x+7)} = -\frac{1}{56}. \end{aligned}$$

b) Mediante evaluación ingenua del límite obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$. En este caso, realizamos dos cambios de variables. Primero, denotamos $u = x^2$ y luego, hacemos $w = u - 1$. Entonces, gracias a la identidad $\lim\limits_{w\to 0}\frac{\operatorname{sen} w}{w} = 1$, obtenemos que;

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{u\to 1}\frac{\operatorname{sen}(u-1)}{\sqrt{u}-1}\\
&= \lim_{u\to 1}\frac{\operatorname{sen}(u-1)(\sqrt{u}+1)}{(\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}+1)}\\
&= \lim_{u\to 1}\left(\frac{\operatorname{sen}(u-1)}{u-1}\right)(\sqrt{u}+1)\\
&= \lim_{w\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\right)(\sqrt{w+1}+1) = 2.
\end{aligned}$$

c) Aplicando evaluación ingenua del límite, se tiene la indeterminación $\infty-\infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

d) Aplicando evaluación ingenua al límite, obtenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces, multiplicamos y dividimos el numerador y el denominador por el factor $1/x$, pues como $x\to\infty$, es obvio que $x\neq 0$. Así;

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+4)/x}{\sqrt{2x^2-5}/x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = 3/\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Respuesta 3:

Observamos que $f(0) = b$ y $f(-1) = b-a$. Por otra parte,

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

lo que implica que $b-a=-\frac{1}{2}$. Además, como $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, $\forall x \neq 0$, tenemos que

$$0 \leq \left| \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^2(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^2(x) = 0$$

y así $b=0$. En conclusión $a=1/2$ y $b=0$.

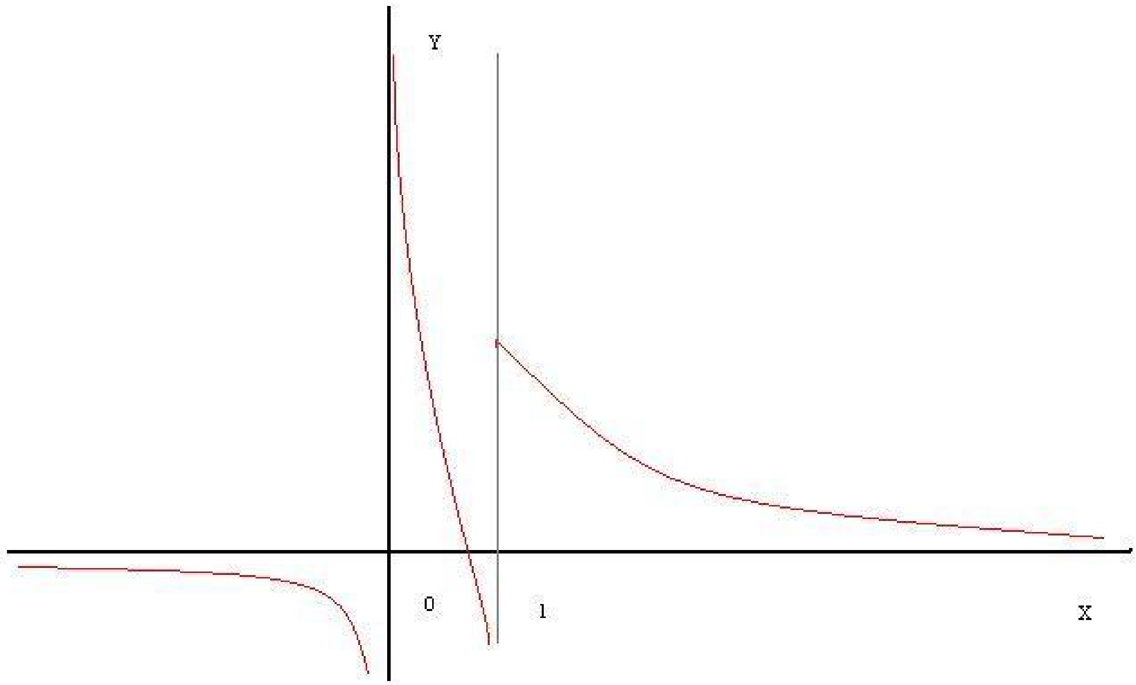
Respuesta 4:

a) **Teorema del valor intermedio:** Sea f una función definida en $[a,b]$ y sea L un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es contínua en $[a,b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c)=L$.

b) La función $f(t) = t^3\cos(t) + 6\operatorname{sen}^5(t) - 3$ es contínua $\forall t \in \mathbb{R}$ y en particular para $t \in [0, 2\pi]$. Aplicamos el teorema del valor intermedio, considerando en su enunciado la función $f(t) = t^3\cos(t) + 6\operatorname{sen}^5(t) - 3$, $L=0$, $a=0$ y $b=2\pi$. Por lo tanto, existe al menos un número c entre 0 y 2π tal que $f(c)=0$.

Respuesta 5:

Una gráfica para f es la siguiente:


Y
0
1
X